

半张量积压缩感知模型的快速重构方法

王金铭, 叶时平, 尉理哲, 许森, 蒋燕君

(浙江树人大学信息科技学院, 浙江 杭州 310015)

摘 要: 为降低随机观测矩阵在压缩感知应用中所需的存储空间, 提升大尺寸图像重构的实时性, 提出一种半张量积压缩感知方法。利用该方法构建低阶随机观测矩阵, 对原始信号进行全局采样, 随后将测量值进行分组处理并采用 l_q -范数 ($0 < q < 1$) 迭代重加权方法进行重构。与传统压缩感知方法相比, 所提方法既可成倍减小随机观测矩阵所需的存储空间, 又可在保证图像重构质量的前提下, 大大提升重构速度。验证实验利用了几种不同大小的随机观测矩阵对 2 维灰度图像进行了测试, 比较其重构图像的峰值信噪比和重构时间。测试结果表明, 利用所提方法在保证重构精度的前提下, 可大大减小随机观测矩阵所需的存储空间 (当降低为传统方法的 $\frac{1}{4096}$ 时, 仍可得到与传统方法一致的重

构质量), 同时极大地提升重构的实时性, 对于 1 024 像素×1 024 像素大小的图像, 其重构时间可提升近 260 倍。

关键词: 压缩感知; 观测矩阵; 半张量积; 存储空间; 重构时间

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2018111

Fast reconstruction method for compressed sensing model with semi-tensor product

WANG Jinming, YE Shiping, YU Lizhe, XU Sen, JIANG Yanjun

College of Information Science & Technology, Zhejiang Shuren University, Hangzhou 310015, China

Abstract: To reduce the storage space of random measurement matrix and improve the reconstruction efficiency for compressed sensing (CS), a new sampling approach for CS with semi-tensor product (STP-CS) was proposed. The proposed approach generated a low dimensional random measurement matrix to sample the sparse signals. Then the solutions of the sparse vector were estimated group by group with a l_q -minimization ($0 < q < 1$) iteratively re-weighted least-squares (IRLS) algorithm. Compared with traditional compressed sensing methods, the proposed approach outperformed conventional CS in speed of reconstruction and that it also obtained comparable quality in the reconstruction. Numerical experiments were conducted using gray-scale images, the peak signal-to-noise ratio (PSNR) and the reconstruction time of the reconstruction images were compared with the random matrices with different dimensions. Comparisons were also conducted with other low storage techniques. Numerical experiment results show that the STP-CS can effectively reduce the storage space of the random measurement matrix to $\frac{1}{4096}$ and decrease tow orders of magnitude

of time that for conventional CS, while maintaining the reconstruction quality. Numerical results also show that the reconstruction time can be effectively improved 260 for the image size of 1 024×1 024.

Key words: compressed sensing, measurement matrix, semi-tensor product, storage space, reconstruction time

收稿日期: 2017-07-21; 修回日期: 2018-06-01

通信作者: 尉理哲, great_baby@outlook.com

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目 (No.LY14E070001); 浙江省公益技术应用研究计划基金资助项目 (No.LGJ18F020001, No.LGG18F010007)

Foundation Items: The Natural Science Foundation of Zhejiang Province (No.LY14E070001), The Science and Technology Project of Zhejiang Province (No.LGJ18F020001, No.LGG18F010007)

1 引言

随着压缩感知 (CS, compressed sensing) [1-3] 理论研究的深入, 压缩感知在大尺寸图像压缩采样和重构的应用研究中一直存在着亟待改善和解决的问题。

1) 信号压缩采样方面, 虽然利用随机观测矩阵进行压缩采样具有理论上的完美特性, 但由于其具有的随机特性, 随机矩阵在硬件实现、存储分配和重构算法构造上, 都需要占用大量的存储空间和内存空间, 在实际应用中受到很大的限制。

2) 信号优化重构方面, 随着图像尺寸的增大, 重构过程运算量将呈指数级增长, 这使图像的重构过程非常耗时, 大大降低了压缩感知重构的实时性。当设定采样率为 0.5 时, 利用迭代重加权 (IRLS, iterative re-weighted least square) [4-5] 算法重构一幅 256 像素×256 像素大小的图像, 所需时间约为 60 s 左右; 若重构一幅 512 像素×512 像素大小的图像, 则约需 1 000 s; 但若重构一幅大小为 1 024 像素×1 024 像素大小的图像, 其重构时间则是无法忍受的。

针对问题 1), 相关科研人员分别提出了分块压缩感知 (BCS, block compressed sensing) [6-8]、Kronecker 压缩感知 [9-11]、结构化观测矩阵 [12-13]、低秩观测矩阵 [14-15]、确定性观测矩阵 [16-17] 等方法, 用于降低观测矩阵所需的存储空间。而针对重构实时性问题, 虽然有一些重构算法具备较快的重构速度, 如正交匹配追踪算法 (OMP, orthogonal matching pursuit) [18], 但其重构精度却稍劣于 IRLS 的重构方法 [19]。

因此, 找到一种在保证重构质量的前提下, 既能有效降低观测矩阵 (特别是随机观测矩阵) 的存储空间, 又能降低计算复杂度、有效提升重构实时性的重构算法, 仍是一个需要研究的课题。

本文将讨论一种基于半张量积的压缩感知 (STP-CS, semi-tensor product CS) 方法。该方法利用低阶随机矩阵对原始信号进行全局采样, 通过对测量值进行分组处理, 再结合 IRLS 方法进行重构。利用该方法既可成倍降低观测矩阵的存储空间, 又可在保证重构精度的前提下, 大大提升重构的实时性。

为验证该方法的有效性, 本文针对 2 维灰度图像 (令其大小为 $N \times N$, 设定测量数为 M), 构建大小为 $\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}$ (t 为测量矩阵减小的倍数, 且为正整数) 的随机观测矩阵, 利用半张量积原理对原始图像的小波

系数进行全局采样, 对采样所得的值进行分组并重构, 比较重构质量和重构时间。经比较可得, 本文方法在保证重构质量的同时, 可成倍降低观测矩阵的存储空间 (最小可降为传统模型中观测矩阵所需存储空间的 $\frac{1}{1\ 024}$), 同时可大大提升重构的实时性, 如—

幅 512 像素×512 像素大小的图像 (采样率为 0.5 时), 选取 $t=32$, 利用本文方法结合 IRLS 重构算法, 重构时间仅需 24.5 s 左右, 比传统方法快了 80 多倍。为进一步验证该方法的有效性, 将其与 BCS 方法、Kronecker 压缩感知方法进行了峰值信噪比和重构时间的比较, 结果也充分验证了本文所述方法的有效性。

2 半张量积压缩感知方法

在传统压缩感知模型中, 对于一个大小为 $N \times N$ 的 2 维灰度图像信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 若存在一个与稀疏矩阵 $\Psi_{N \times N}$ 不相干的矩阵 $\Phi_{M \times N}$ (其中 $M \ll N$) 作为观测矩阵, 则可以利用该观测矩阵对原始信号的稀疏系数进行压缩采样, 即

$$\mathbf{y}_{M \times N} = \Phi_{M \times N} \Psi_{N \times N} \boldsymbol{\theta}_{N \times N} \quad (1)$$

其中, 正交基矩阵满足 $\Psi \Psi^T = \Psi^T \Psi = \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\theta}_{N \times N}$ 表示信号经稀疏化后的系数, 且 $\boldsymbol{\theta}_i = \langle \mathbf{x}_i, \Psi_i \rangle = \Psi_i^T \mathbf{x}_i$ 。

根据附录 1 中所述的半张量积理论, 本文的半张量积压缩感知模型定义为

$$\mathbf{y}_{M \times N} = \Phi_{\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}} \times \Psi_{N \times N} \times \boldsymbol{\theta}_{N \times N} \quad (2)$$

其中, 符号 \times 表示向量的左半张量积, $\Phi_{\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}}$ 为低阶观测矩阵, 其大小为 $\frac{M}{t} \times \frac{N}{t} \in \mathbb{Z}^+$, $t \in \mathbb{Z}^+$, 且为后续表述方便, 此处定义 $\Phi_{\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}}$ 为 $\Phi(t)$ 。

对比式(1)和式(2)可知, 2 个模型中采用的观测矩阵大小发生了变化, 对于相同的数据类型, 式(2)所示 $\Phi(t)$ 所需存储空间仅为 $\Phi_{M \times N}$ 的 $\frac{1}{t^2}$ 。对于一幅大小为 1 024 像素×1 024 像素的原始图像进行压缩采样和重构 (假设采样率为 0.25), 若数据采用单精度浮点数据格式, 则高斯随机观测矩阵需 1 024 KB 的存储空间; 若选取 $t=16$, 采用本文所述模型, 其观测矩阵仅需 4 KB。由此, 利用本文所述模型可以大大降低观测矩阵所需存储空间, 进而对降低重构

过程的内存占用率、计算复杂度有积极的引导意义。此外，对于式(2)所示 STP-CS 模型，当有 $t=1$ 时，式(2)就退化为传统的压缩感知模型，且利用附录 1，可以验证 STP-CS 方法满足传统压缩感知模型的采样要求。

$$\begin{aligned} \Phi_{\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}} \times (\Psi_{N \times N} \times \theta_{N \times N}) &= \\ \Phi_{\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}} \times (\Psi \times \theta)_{N \times N} &= (\Phi \times \Psi \times \theta)_{M \times N} = y_{M \times N} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}} \times \Psi_{N \times N} \right) \times \theta_{N \times N} &= (\Phi \times \Psi)_{M \times N} \times \theta_{N \times N} = \\ (\Phi \times \Psi \times \theta)_{M \times N} &= y_{M \times N} \end{aligned}$$

从而，可以将一幅原始图像（大小为 $N \times N$ ）的稀疏系数利用 $\Phi(t) (t > 1)$ 进行压缩采样，同样可以得到大小为 $M \times N$ 的测量值。

因此，本文后续将重点讨论在设定 $t > 1$ 的条件下，观测矩阵 $\Phi(t)$ 与稀疏矩阵之间的相关性是否满足压缩感知的 RIP (restricted isometry property) 条件以及讨论如何在 $t > 1$ 的条件下，实现对原始图像的快速重构。

2.1 相关性分析

根据低阶观测矩阵 $\Phi(t)$ 的性质，定义式(3)所示的传感矩阵 $A^{CS}(t)$ 为

$$A^{CS}(t) = \Phi(t) \times \Psi_{N \times N} \quad (3)$$

其中， $A^{CS}(t) \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 。

展开式(3)，有

$$A^{CS}(t) = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{1,\frac{N}{t}} \\ \phi_{2,1} & \cdots & \phi_{2,\frac{N}{t}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{\frac{M}{t},1} & \cdots & \phi_{\frac{M}{t},\frac{N}{t}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1,N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{N,1} & \psi_{N,2} & \cdots & \psi_{N,N} \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中， $\phi_{i,j} \in \Phi(t) (i=1,2,\dots,\frac{M}{t}, j=1,2,\dots,\frac{N}{t})$ ， $\psi_{i,j} \in \Psi_{N \times N} (i,j=1,2,\dots,N)$ 。

对于式(4)，利用半张量积矩阵乘法定义，有

$$A^{CS}(t) = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_j \ \cdots \ a_N) \quad (5)$$

其中， a_j 表示传感矩阵 $A^{CS}(t)$ 中长度为 N 的列向量，可表示为

$$a_j = \left(\eta_{1,j} \ \eta_{2,j} \ \cdots \ \eta_{i,j} \ \cdots \ \eta_{\frac{M}{t},j} \right)^T \quad (6)$$

其中， $\eta_{i,j} = \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \phi_{i,p} (\psi_{(p-1)t+1,j}, \dots, \psi_{pt,j})^T (i=1,2, \dots, \frac{M}{t}, j=1,2,\dots,N)$ 。

根据自相关定义，有

$$\mu(A^{CS}(t)) \triangleq \max_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i, j \leq N}} \frac{|a_i^T a_j|}{\|a_i\|_2 \|a_j\|_2} \quad (7)$$

根据式(7)，考察 $A^{CS}(t)$ 中任意不相同的 2 列 a_{j_1} 和 a_{j_2} ，可得

$$\begin{aligned} a_{j_1}^T \times a_{j_2} &= \eta_{1,j_1}^T \eta_{1,j_2} + \eta_{2,j_1}^T \eta_{2,j_2} + \cdots + \eta_{i,j_1}^T \eta_{i,j_2} + \cdots + \\ \eta_{\frac{M}{t},j_1}^T \eta_{\frac{M}{t},j_2} &= \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \sum_{p_1=1}^{\frac{N}{t}} \sum_{p_2=1}^{\frac{N}{t}} \phi_{i,p_1} \begin{pmatrix} \psi_{(p_1-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_1} \end{pmatrix}^T \phi_{i,p_2} \begin{pmatrix} \psi_{(p_2-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{p_2t,j_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

整理式(8)，有

$$a_{j_1}^T \times a_{j_2} = \sum_{p_1=1}^{\frac{N}{t}} \sum_{p_2=1}^{\frac{N}{t}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \phi_{i,p_1} \phi_{i,p_2} \right) \begin{pmatrix} \psi_{(p_1-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{p_1t,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p_2-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{p_2t,j_2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

对于现有的观测矩阵，如高斯矩阵、伯努利矩阵、确定性矩阵等，均在一定程度上满足独立分布性、不相关性或正交性，能满足压缩感知理论的 RIP 特性要求。本文所采用的低阶观测矩阵 $\Phi(t)$ ，完全是依照 RIP 特性要求构建的，仅改变了矩阵的大小，并不改变矩阵的任何特性，则对 $\phi_{i,j} \in \Phi_{\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}}$ ，当

$p_1 \neq p_2$ 时，有 $\sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \phi_{i,p_1} \phi_{i,p_2} \rightarrow 0$ 。

从而，对式(9)，当 $p_1 \neq p_2$ 时，有

$$\begin{aligned} a_{j_1}^T \times a_{j_2} &= \\ \sum_{p_1=1}^{\frac{N}{t}} \sum_{p_2=1}^{\frac{N}{t}} \left(\sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \phi_{i,p_1} \phi_{i,p_2} \right) &\begin{pmatrix} \psi_{(p_1-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{p_1t,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p_2-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{p_2t,j_2} \end{pmatrix} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

当 $p_1 = p_2$ 时，有

$$a_{j_1}^T \times a_{j_2} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \phi_{i,p}^2 \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

对于一个选定的观测矩阵，有

$$c = \max(\phi_{i,p}^2), i=1,2,\dots, \frac{M}{t}$$

且 $c > 0$ ，则有

$$\mathbf{a}_{j_1}^T \times \mathbf{a}_{j_2} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \phi_{i,p}^2 \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_2} \end{pmatrix} < \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} c \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

而式(11)中关于 ψ 项，有

$$\sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_2} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \begin{pmatrix} \psi_{1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{t,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{t,j_2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_2} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \psi_{\frac{N}{t-1}+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{N,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{\frac{N}{t-1}+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{N,j_2} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \psi_{i,j_1} \psi_{i,j_2}$$

由稀疏表示矩阵的特性，当 $\psi_{i,j} \in \Psi_{N \times N}$ 且满足

$$j_1 \neq j_2 \text{ 时, 有 } \sum_{i=1}^N \psi_{i,j_1} \psi_{i,j_2} = 0.$$

从而，对于式(11)，有

$$\mathbf{a}_{j_1}^T \times \mathbf{a}_{j_2} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{t}} \sum_{p=1}^{\frac{N}{t}} \phi_{i,p}^2 \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_1} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_{(p-1)t+1,j_2} \\ \vdots \\ \psi_{pt,j_2} \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

由此，对于满足 RIP 特性，且大小为 $\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}$ 的观测矩阵，能够满足与稀疏矩阵之间的低相关性要求。这充分说明本文所述 STP-CS 模型能够实现原始信号的采样和精确重构。

2.2 测量数下限

对于式(2)，在 2 维灰度图像的小波系数中任取一列 $\theta_{N \times 1}$ ，则有

$$\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi(t) \times \theta_{N \times 1} \quad (12)$$

展开式(12)，有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,\frac{N}{t}} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{2,\frac{N}{t}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{\frac{M}{t},1} & \phi_{\frac{M}{t},2} & \dots & \phi_{\frac{M}{t},\frac{N}{t}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{pmatrix} \quad (13)$$

利用半张量积乘法原理，有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1,1} + \dots + \xi_{1,j} + \dots + \xi_{1,\frac{N}{t}} \\ \vdots \\ \xi_{i,1} + \dots + \xi_{i,j} + \dots + \xi_{i,\frac{N}{t}} \\ \vdots \\ \xi_{\frac{M}{t},1} + \dots + \xi_{\frac{M}{t},j} + \dots + \xi_{\frac{M}{t},\frac{N}{t}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中， $\xi_{i,j} = \phi_{i,j} (\theta_{(j-1)t+1} \dots \theta_{jt})^T$ ， $i=1,2,\dots, \frac{M}{t}$ ，

$j=1,2,\dots, \frac{N}{t}$ ，且 $\xi_{i,j}$ 表示一个长度为 t 的列向量。任意行元素 $\xi_{i,1} + \dots + \xi_{i,j} + \dots + \xi_{i,\frac{N}{t}}$ 的和也是一个长度为 t 的列向量。

由式(14)可知，利用 STP-CS 模型在对原始信号进行采样的过程中，并没有改变线性采样的本质，测量值同样是用原始信号的线性组合来表示的。为了更加清晰地了解 STP-CS 的压缩采样过程，令 $N=16$ ， $M=12$ ， $t=4$ ，则有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} + \phi_{12} \begin{pmatrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{pmatrix} + \phi_{13} \begin{pmatrix} \theta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} + \phi_{14} \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{14} \\ \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} + \phi_{22} \begin{pmatrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{pmatrix} + \phi_{23} \begin{pmatrix} \theta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} + \phi_{24} \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{14} \\ \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} + \phi_{32} \begin{pmatrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{pmatrix} + \phi_{33} \begin{pmatrix} \theta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix} + \phi_{34} \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{14} \\ \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (15)$$

观察式(15), 将测量值 $y_{12 \times 1}$ 进行分组, 有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_5 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_5 \\ \theta_9 \\ \theta_{13} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_6 \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_6 \\ \theta_{10} \\ \theta_{14} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_7 \\ y_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \theta_7 \\ \theta_{11} \\ \theta_{15} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} y_4 \\ y_8 \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_4 \\ \theta_8 \\ \theta_{12} \\ \theta_{16} \end{pmatrix} \quad (19)$$

由式(16)~式(19)可知, 利用低阶观测矩阵进行压缩采样后, 对测量值进行分组处理, 即将长度为 M 的测量值划分成 t 组, 每组长度为 $\frac{M}{t}$ 。仔细对比式(16)~式(19)可以发现, 上述对测量值的分组处理中, 每组的测量值并不是连续排列的, 而是以 t 为间隔选取的。

从另一个角度来看, 本文所述的 STP-CS 方法也具备了分布式压缩感知的功能, 即将长度为 N 的原始信号划分成 t 组信号群, 且该 t 组信号群能在同一个稀疏基上进行稀疏表示, 并利用低阶观测矩阵对 t 组信号群分别进行压缩采样, 得到 t 组测量群。

此外, 据式(16)~式(19)所示, 本文所述的 STP-CS 的压缩采样方法, 完全与传统压缩感知方法一样, 能够保留原始信号所携带的信息, 从而能保证对原始信号的精确重构。

对于长度为 N 的原始信号, 将其划分成 t 组, 令每组信号的稀疏度为 k_i ($0 \leq k_i \leq \frac{N}{t}, i=1,2,\dots,t$), 若低阶观测矩阵 $\Phi(t)$ 满足 RIP 特性要求, 则当每组的测量数 $M_i(i=1,2,\dots,t)$ 满足 $M_i \geq k_i \text{lb} \left[\frac{N}{tk_i} \right]$ 时, 便能保证每组测量值得到精确的重构。从而, 对于长度为 N 的原始信号, 采用 STP-CS 压缩采样方法, 其测量数下限应满足

$$M = \sum_{i=1}^t M_i \geq \sum_{i=1}^t k_i \text{lb} \left[\frac{N}{tk_i} \right] \quad (20)$$

便能保证精确重构长度为 N 的原始信号。

2.3 重构算法

虽然 IRLS 具有较高的重构精度, 但由于 IRLS 算法的天然特性, 利用其对大尺寸图像进行全局重构时, 实时性仍有待提升。为此, 本文结合 STP-CS 压缩采样特点, 提出了一种基于 IRLS 的分组重构方法, 可以有效提升重构的实时性, 且保持了信号的重构质量。

在 2 维灰度图像稀疏系数中任取一列, 令其为 $\theta_{N \times 1}$, 其测量数为 M , 利用低阶观测矩阵 $\Phi(t)$ ($t > 1$) 进行 STP-CS 压缩采样, 得到长度为 M 的测量值, 并将测量值 $y_{M \times 1}$ 分成 t 组, 则有

$$\begin{cases} Y_{\frac{M}{t} \times 1}^1 = \left(y_1, y_{t+1}, y_{2t+1}, \dots, y_{jt+1}, \dots, y_{\frac{M}{t-1}t+1} \right)^T \\ Y_{\frac{M}{t} \times 1}^2 = \left(y_2, y_{t+2}, y_{2t+2}, \dots, y_{jt+2}, \dots, y_{\frac{M}{t-1}t+2} \right)^T \\ \vdots \\ Y_{\frac{M}{t} \times 1}^i = \left(y_i, y_{t+i}, y_{2t+i}, \dots, y_{jt+i}, \dots, y_{\frac{M}{t-1}t+i} \right)^T \\ \vdots \\ Y_{\frac{M}{t} \times 1}^t = \left(y_t, y_{2t}, y_{3t}, \dots, y_{(j+1)t}, \dots, y_M \right)^T \end{cases} \quad (21)$$

上述每组测量值的长度均为 $\frac{M}{t}$, 且其中第 i 组可表示为

$$Y_{\frac{M}{t} \times 1}^i = \begin{pmatrix} y_i \\ y_{t+i} \\ y_{2t+i} \\ \vdots \\ y_{\frac{M}{t-1}t+i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,\frac{N}{t}} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{2,\frac{N}{t}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{M,1} & \phi_{M,2} & \dots & \phi_{M,\frac{N}{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_i \\ \theta_{t+i} \\ \theta_{2t+i} \\ \vdots \\ \theta_{\frac{N}{t-1}t+i} \end{pmatrix}_{\frac{N}{t} \times 1} \quad (22)$$

其中, $i=1,2,\dots,t$, 为后续描述方法简便, 定义 $\left(\theta_{\frac{N}{t} \times 1}^i \right)^T = \left(\theta_i \theta_{t+i} \theta_{2t+i} \dots \theta_{\frac{N}{t-1}t+i} \right)^T$ 。

如前所述，对于每一组测量值，均采用一个大小为 $\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}$ 的观测矩阵 $\Phi(t)$ ($t > 1$) 实现了对一个长度为 $\frac{N}{t}$ 的原始信号进行压缩采样，得到一个长度为 $\frac{M}{t}$ 的测量值序列。因此，从任意一组来看，其压缩采样过程与传统压缩采样方法具有一致性。

由此，对于每一组测量值，本文采用 l_q -范数 ($0 < q < 1$) 的 IRLS 方法进行重构。重构过程中，令第 i 组测量值为 $Y_{\frac{M}{t} \times 1}^i$ ，则每一组的重构解可表示为

$$\hat{\theta}_{n+1}^i = D_n \Phi^T(t) [\Phi(t) D_n \Phi^T(t)]^{-1} Y_{\frac{M}{t} \times 1}^i \quad (23)$$

其中， $\hat{\theta}_{n+1}^i$ 表示第 i 组的第 $n+1$ 次迭代结果， D_n 为 $\frac{N}{t} \times \frac{N}{t}$ 大小的对角矩阵， D_n 中第 p 个对角分量为 $\frac{1}{w_p^{(n)}} (p=1, 2, \dots, \frac{N}{t})$ ，其中， $w_p^{(n)}$ 为第 n 次迭代权重，定义为

$$w_p^{(n)} = \left([(\hat{\theta}_p^{i,j})^{(n)}]^2 + \varepsilon_n^{1+q} \right)^{\frac{2-q}{q}} \quad (24)$$

根据设定的迭代终止条件，完成迭代后，将返回每 i 组的重构结果 $\hat{\theta}^i$ ($\hat{\theta}^i \in \mathbb{R}^{\frac{N}{t} \times 1}$ ，且 $i=1, 2, \dots, t$)。完成全部 t 组测量值的重构后，对每一组重构结果进行如式(25)所示的重组，即可得到一系列稀疏信号的最终重构结果 $\hat{\theta}_{N \times 1} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 。

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{N \times 1}^T(1:t) = (\hat{\theta}_1^1 \hat{\theta}_1^2 \dots \hat{\theta}_1^i \dots \hat{\theta}_1^t)^T \\ \hat{\theta}_{N \times 1}^T(t+1:2t) = (\hat{\theta}_2^1 \hat{\theta}_2^2 \dots \hat{\theta}_2^i \dots \hat{\theta}_2^t)^T \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{N \times 1}^T(pt+1:(p+1)t) = (\hat{\theta}_p^1 \hat{\theta}_p^2 \dots \hat{\theta}_p^i \dots \hat{\theta}_p^t)^T \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{N \times 1}^T(\frac{N}{t}-1)t+1:N) = (\hat{\theta}_{\frac{N}{t}}^1 \hat{\theta}_{\frac{N}{t}}^2 \dots \hat{\theta}_{\frac{N}{t}}^i \dots \hat{\theta}_{\frac{N}{t}}^t)^T \end{cases} \quad (25)$$

其中， $\hat{\theta}_{N \times 1}^T(pt+1:(p+1)t)$ 为 $\hat{\theta}_{N \times 1}$ 中第 $(pt+1) \sim (p+1)t$ 个元素， $p=1, 2, \dots, \frac{N}{t}$ 。 $\hat{\theta}_p^i$ 为第 i 组重构结果的第 p 个元素。

从而，本文所涉及的 l_q -范数 ($0 < q < 1$) 的迭代加权分组重构算法如下。

输入 测量值 $Y_{M \times N}$ ，观测矩阵 $\Phi(t)$ ，原始信号长度 N

输出 稀疏解 $\hat{\theta}_{N \times N}$

- 1) 初始化 $j=1$ ，取 N 列测量值中的第 j 列；
- 2) 根据式(21)对该列测量值进行分组；
- 3) 初始化： $w^{(0)} = (1, \dots, 1)$ ， $\varepsilon_0 = 1$ ， $\hat{\theta}_{(0)}^i = (1, \dots, 1)$ ， $i=1$ ；
- 4) 根据 $w^{(n)}$ 得到 $N \times N$ 对角矩阵 D_n ；
- 5) 根据式(23)计算并更新 $\hat{\theta}_{(n+1)}^i$ ；
- 6) 判断 $\|\hat{\theta}_{(n+1)}^i - \hat{\theta}_{(n)}^i\|_2$ 是否小于 $\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{100}}$ ，若满足，则执行步骤 5)，否则跳过步骤 5)；
- 7) 更新 ε_n 值， $\varepsilon_{n+1} = \rho \varepsilon_n$ ($0 < \rho < 1$)；
- 8) 根据式(24)计算并更新 $w^{(n)}$ 值；
- 9) 更新迭代次数，并判断 ε_n 是否满足条件，若不满足，返回步骤 4)，继续迭代计算，若满足则退出迭代，返回稀疏解 $\hat{\theta}_{(n+1)}^i$ ；

10) 执行 $i=i+1$ ，判断 $i=t$ ？若不满足，返回步骤 3)，继续迭代计算，若满足则退出迭代；

11) 根据式(25)对每一组的重构结果进行重组，返回稀疏解 $\hat{\theta}_{N \times 1}$ ；

12) 执行 $j=j+1$ ，判断 $j=N$ ？若不满足，返回步骤 1)，继续迭代计算，若满足则退出迭代，输出 $\hat{\theta}_{N \times N}$ 。

2.4 计算复杂度

在信号重构过程中，对于一个长度为 N 的稀疏向量 $\theta_{N \times 1}$ ，稀疏度为 k ，采样数为 M ，若利用大小为 $M \times N$ 的观测矩阵对其进行采样，需要进行 $M \times N$ 次乘法运算和 $M \times (N-1)$ 次加法运算，其相应的重构计算复杂度达到了 $O(N^3)$ ；而利用大小为 $\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}$ 的观测矩阵对 $\theta_{N \times 1}$ 进行采样，仅需 $\frac{M}{t} \times \frac{N}{t}$ 次乘法运算和 $\frac{M}{t} \times \left(\frac{N}{t} - 1\right)$ 次加法运算，通过上述分组重构方

法，其重构的计算复杂度仅约为 $O\left(\frac{N}{t}\right)^3$ 。

以上，本文着重讨论了利用半张量积压缩感知原理对原始信号进行压缩采样和分组重构的理论方法。由于观测矩阵在压缩感知的采样及重构过程中担任着关键角色，其矩阵大小是影响数据存储量

及计算复杂度的关键因素。从而利用本文所述方法采用低阶观测矩阵既有益于降低数据的存储空间和计算复杂度，同时利用分组重构方法也有益于提升重构的实时性。

3 实验结果与分析

为验证本文所述方法的有效性，本文针对 2 维灰度图像设计了 2 组验证实验，第一组设定不同的采样率，分别构建不同大小的高斯随机矩阵进行采样，然后利用 l_q -范数($0 < q < 1$)的 IRLS 方法进行重构，比较重构图像的峰值信噪比 (PSNR, peak signal to noise ratio)和重构时间。第二组设定不同的采样率，与 BCS^[6]和 Kronecker^[10]等低存储压缩感知方法进行了比较。

实验中采用的 2 维灰度图像分别为 256 像素×256 像素的 Peppers、512 像素×512 像素的 Lena、1 024 像素×1 024 像素的 Mandrill 以及 2 048 像素×2 048 像素的 Cameraman。实验平台配备了 Intel i7-4600 CPU, 2.1 GHz 主频, 8 GB 内存, 64 位 Windows 8 操作系统, 仿真软件采用 Matlab R2010b。

实验时，设定算法的终止条件是 $\varepsilon_n < 10^{-8}$ ，即在每次重构过程中，设 $\varepsilon_0 = 1$ ，若经过若干次迭代后，有 $\varepsilon_n < 10^{-8}$ ，则退出重构。此外，对于 l_q -范数($0 < q < 1$)的 IRLS 算法，文献[5]证明了在 q 值较大时，其恢复稀疏解的能力相对较强，因此，后续实验中均选择 $q=0.8$ 来验证 STP-CS 压缩采样方法对稀疏解的重构能力。

第一组实验中，首先对原始 2 维灰度图像进行小波变换，得到稀疏的小波系数；然后根据设

定的采样率 ($\frac{M}{N} = 0.125 0, 0.250 0, 0.375 0, 0.437 5, 0.500 0, 0.562 5, 0.625 0, 0.750 0$)，构建 6 个不同大小的高斯随机观测矩阵 $\Phi(t)$ ($t=1, 2, 4, 8, 16, 32$)，分别对原始图像的稀疏系数进行压缩采样。表 1 列出了采样率为 0.5 时的 3 种原始图像的观测矩阵的大小。

由表 1 可知，当 $t=1$ 时，其压缩采样方式就退化为传统的压缩感知采样模式，故后续实验主要针对 $t=1$ 和 $t>1$ (如 $t=2, 4, 8, 16, 32$) 时的重构性能进行比较。另外，当 $t=32$ 时，其观测矩阵仅为传统观测矩阵 ($t=1$ 时)的 $\frac{1}{1024}$ ，起到了降低观测矩阵所需的存储空间的目的。

首先利用低阶观测矩阵结合式(2)进行半张量积压缩采样后，得到对应的测量值 y ；随后对测量信号 y 进行分组，并利用本文所述的 l_q -范数方法进行重构，得到重构的小波系数；通过对重构结果重新进行排列，进而得到重组后的重构小波系数；最后利用小波逆变换，得到重构图像。实验中，对于每一幅灰度图像的稀疏系数，根据设定的采样率及观测矩阵的大小，分别进行了 50 次测试，以观察其重构图像质量，并对重构图像的峰值信噪比和重构时间进行评估。由于篇幅问题，仅在图 1~图 3 中列出了采样率为 0.5 时的 Peppers、Lena 及 Mandrill 的重构结果，其重构图像是在 50 次重构结果中随机选取的。

图 1~图 3 中的(b)分别表示对 2 维原始图像的重构结果。从图 1~图 3 可知，对于 3 种不同大小的原始图像，当 $t=2, 4, 8, 16, 32$ 时，其相应的重

表 1 半张量积压缩感知模型的观测矩阵大小($\frac{M}{N}=0.5$)

原始图像	$t=1$	$t=2$	$t=4$	$t=8$	$t=16$	$t=32$
Peppers	256×256	128×256	64×128	32×64	16×32	8×16
Lena	512×512	256×512	128×256	64×128	32×64	16×32
Mandrill	1 024×1 024	512×1 024	256×512	128×256	64×128	32×64

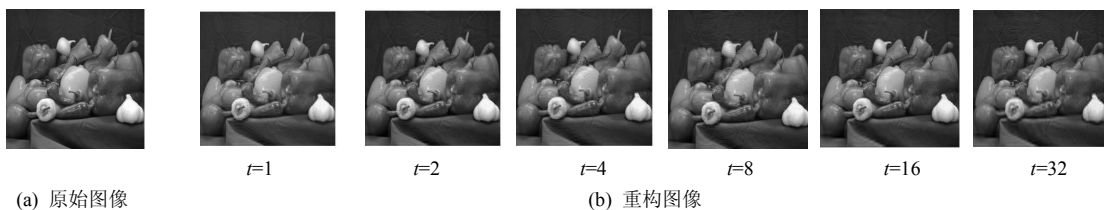


图 1 不同大小的观测矩阵采样重构 2 维图像比较 (Peppers, $M=128, N=256$)

构图像质量与传统压缩采样方法 ($t=1$) 基本一致。为进一步对重构图像的质量进行评估, 表 2 和表 3 分别列出了利用 6 种不同大小的高斯随机观测矩阵进行 50 次采样和重构后, 其重构图像峰值信噪比和重构时间的平均值。

由表 2 可知, 对于 Peppers (256 像素×256 像素) 而言, 当观测矩阵减小至传统观测矩阵的 $\frac{1}{64}$ (即

$t=8$) 时, 其重构图像质量仍与 $t=1$ 时保持同一水平, 但持续减小观测矩阵后, 其重构图像的 PSNR 值已有较为明显的下降趋势。然而, 对于 Lena (512 像素×512 像素) 和 Mandrill (1 024 像素×1 024 像素) 而言, 当观测矩阵减小至传统的 $\frac{1}{256}$ 或 $\frac{1}{1024}$ 时, 其重构图像仍能与 $t=1$ 时保持一致水平。表 2 的实验结果充分说明了可以采用低阶观测矩阵对原始图像信

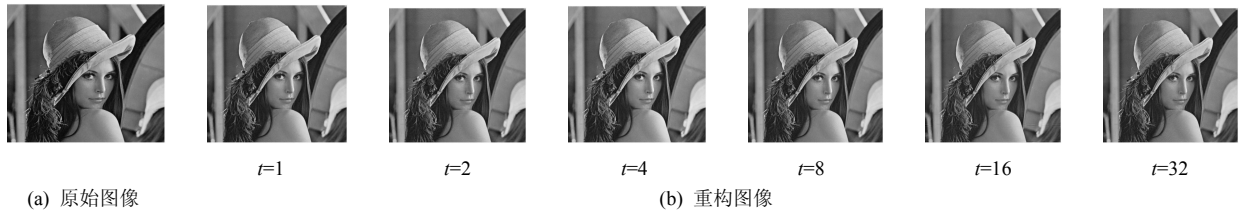


图 2 不同大小的观测矩阵采样重构 2 维图像比较 (Lena, $M=256$, $N=512$)

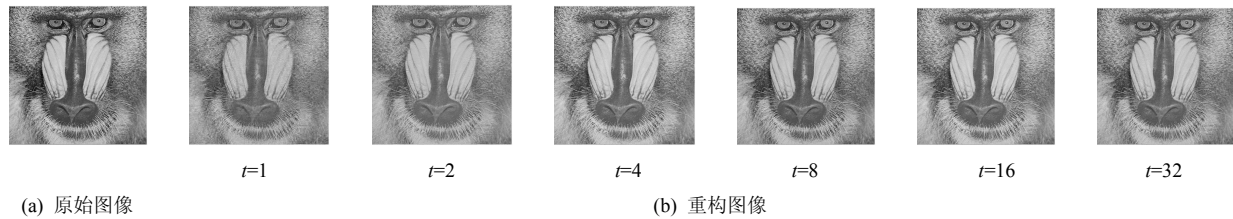


图 3 不同维数观测矩阵重构 2 维图像比较 (Mandrill, $M=512$, $N=1024$)

表 2 不同大小的高斯随机观测矩阵重构 2 维图像峰值信噪比

原始图像	t	峰值信噪比/dB							
		0.125 0	0.250 0	0.375 0	0.437 5	0.500 0	0.562 5	0.625 0	0.750 0
Peppers (256 像素×256 像素)	1	19.282 8	26.610 5	31.165 7	33.838 1	35.586 5	37.423 6	39.932 3	44.381 2
	2	19.636 6	27.603 6	31.338 3	33.487 7	35.333 0	37.411 2	39.699 2	44.702 1
	4	20.766 3	26.917 3	31.237 3	32.932 1	35.265 6	37.270 5	38.834 2	43.545 1
	8	19.018 9	27.232 3	31.271 6	32.749 9	34.830 6	36.700 4	38.845 1	43.592 9
	16	18.756 4	25.921 4	30.783 0	32.554 3	34.467 2	36.488 1	38.073 3	43.514 8
	32	18.075 7	25.373 5	29.429 6	31.795 2	32.997 5	34.157 8	36.986 4	41.876 1
Lena (512 像素×512 像素)	1	25.526 1	29.850 9	34.288 7	35.074 8	36.053 6	37.651 6	39.035 0	41.885 5
	2	25.458 2	30.192 0	34.216 3	35.767 9	36.506 8	37.436 6	39.727 8	42.287 9
	4	25.412 3	29.578 1	34.124 7	35.086 4	36.342 2	37.493 0	39.270 5	42.433 7
	8	25.751 4	29.734 7	33.225 8	35.286 4	36.226 6	37.530 1	38.591 0	41.950 1
	16	25.369 5	30.683 7	33.117 5	35.002 9	36.594 2	37.237 4	38.991 9	42.083 8
	32	24.926 4	29.219 5	33.015 7	34.907 1	36.035 9	37.795 8	38.317 1	41.254 6
Mandrill (1 024 像素×1 024 像素)	1	19.974 2	22.428 7	25.103 1	26.572 4	28.694 6	30.274 1	32.895 9	37.861 0
	2	20.084 6	22.364 1	25.067 4	26.581 1	28.903 9	30.315 6	32.529 6	37.656 2
	4	19.842 0	22.266 0	25.025 6	26.710 0	29.230 6	29.942 1	32.008 4	37.959 1
	8	20.179 6	22.372 4	24.948 5	25.943 3	28.804 9	30.318 6	32.255 4	37.249 4
	16	20.185 0	22.668 0	24.889 7	25.877 1	28.825 3	30.312 6	31.957 1	37.262 6
	32	19.298 5	22.049 6	24.892 6	26.090 4	28.392 9	31.465 6	31.833 9	37.049 6

号进行压缩采样并精确重构。特别是针对 Lena 和 Mandrill 等大尺寸图像,能更为有效地利用低阶随机观测矩阵实现对原始信号的压缩采样且保持了较高的重构精度。

需要指出的是,随着观测矩阵的持续减小(即 $t > 8$ 时),虽然 Peppers 重构质量的平均值有较为明显的降低,但这并不意味着观测矩阵的减小,其重构质量一定存在下降的趋势。在 50 次的压缩采样和重构实验中,对于 Peppers 而言,仍存在若干次重构结果达到或超过了 $t=1$ 时的质量水平。通过计算传感矩阵 $A^{CS}(t)$ 的相关性发现,若系统生成的低阶观测矩阵能够较好地满足 RIP 特性,则依然能够得到较高的重构质量,反之,则会造成重构质量的下降。这充分说明,只要系统生成的低阶随机观测矩阵能够满足 RIP 特性,便能实现对原始信号的精确重构。

表 3 列出了上述 50 次压缩采样和重构所需的时间。由表 3 可知,当 $t=1$ 时,对于全部采样率,Peppers 重构所需的平均时间约为 61.25 s;当 $t=2$ 时,重构的平均时间约为 17.875 s,速度提升了 3 倍多;随着 t 继续增大,重构所需的时间持续降低,

速度最快提升了近 11 倍多(当 $t=8$ 时)。随着图像尺寸的增大,其重构时间呈指数级增加,例如 Lena,当 $t=1$ 时,对于全部采样率,Lena 重构所需的平均时间约为 1 579 s;当 $t=2$ 时,重构的平均时间约为 268 s,速度提升了近 6 倍;随着 t 继续增大,重构所需的时间持续降低,速度最快提升了近 69 倍(当 $t=16$ 时,平均重构时间仅约为 23 s)。而对于 Mandrill 而言,当 $t=1$ 时,随着采样率的增加,其所需的重构时间是无法忍受的,而采用本文所述的分组重构方法,其重构所需的平均时间仅约为 99 s(当 $t=32$ 时),重构速度加快了近 260 倍,极大地提升了大尺寸图像重构的实时性。

综上所述,利用本文所述的低阶观测矩阵进行压缩全局采样和分组重构的方法,在保证重构质量的前提下,既可成倍降低观测矩阵所需的存储空间,又可大大提升重构的实时性,这对于进一步拓展压缩感知的实际应用有非常积极的意义。

此外,利用本文所述的分组重构算法能够提升重构实时性的主要原因在于大尺寸原始图像数据被划分成 t 组,每组数据大小仅为 $\frac{N}{t}$ 。随着 t 的增

表 3 不同大小的高斯随机观测矩阵重构 2 维图像重构时间

原始图像	t	重构时间/s							
		0.125 0	0.250 0	0.375 0	0.437 5	0.500 0	0.562 5	0.625 0	0.750 0
Peppers (256 像素×256 像素)	1	15.43	29.92	44.58	67.86	68.74	79.81	87.54	101.1
	2	6.63	11.36	17.22	19.92	20.88	22.46	23.80	25.55
	4	4.18	6.70	8.36	9.12	9.22	10.04	10.89	11.15
	8	4.16	5.08	5.79	6.04	6.11	6.63	6.08	6.21
	16	5.13	6.27	6.56	6.56	6.30	6.59	6.29	5.90
	32	6.34	8.13	8.73	8.86	8.89	8.96	8.56	8.00
Lena (512 像素×512 像素)	1	343.27	799.88	1 148.72	1 502.25	1 981.27	2 089.41	2 149.90	2 622.18
	2	73.29	145.95	241.79	283.20	299.61	327.55	357.10	421.12
	4	27.33	45.22	70.33	86.18	86.93	99.41	97.01	102.31
	8	15.52	24.40	31.65	37.24	41.09	41.33	44.20	44.87
	16	17.72	19.00	25.18	27.15	27.78	27.74	27.67	27.58
	32	16.77	16.56	22.34	23.95	24.50	25.33	25.48	26.15
Mandrill (1 024 像素×1 024 像素)	1	7 290.30	17 256.07	21 678.50	30 188.10	35 471.23	39 676.34	42 527.23	43 109.70
	2	1 372.94	3 196.25	4 426.00	6 423.35	7 239.75	8 097.23	8 306.43	9 055.33
	4	287.38	596.67	926.51	1 217.80	1 270.33	1 581.75	1 688.3	1692.5
	8	99.87	210.04	327.23	369.90	368.14	418.80	442.65	482.11
	16	85.83	123.42	149.09	167.18	171.70	177.75	199.72	204.44
	32	73.28	83.17	92.48	104.28	112.36	112.39	113.02	113.65

大，每组数据长度随之减小，从而降低了每组重构的计算复杂度，提升了重构的实时性。

本文旨在保证重构质量的前提下，针对大尺寸图像数据，降低观测矩阵的存储空间并且同时提高重构实时性，为进一步验证本文所述方法的有效性，我们利用 2 048 像素×2 048 像素大小的 Cameraman 图像进行了一组测试，设定采样率为 0.5， t 分别取 1、8、16、32 或 64，实验进行了 10 次，其重构图像峰值信噪比和重构时间的平均值如表 4 所示。

表 4 不同大小的高斯随机观测矩阵重构 Cameramen 图像

测试结果 (2 048 像素×2 048 像素, $\frac{M}{N}=0.5$)		
t	PSNR/dB	时间/s
1	57.096 3	3.4×10^5
8	57.219 0	4 329.12
16	56.879 4	964.16
32	57.100 5	262.25
64	56.864 3	124.97

由表 4 可知，本文所述方法适用于大尺寸图像，特别是在图像重构的实时性上有非常大的提升作用。

为了更为直观地展示本文所述方法的有效性，我们选取了 $t=1, 16$ 及 32 时 Lena 图像的重构 PSNR 值和重构时间绘制了关于重构时间、PSNR 值和采样率的 3 维视图，如图 4 所示。图 4 展现了本文所述方法在重构实时性上的提升作用。

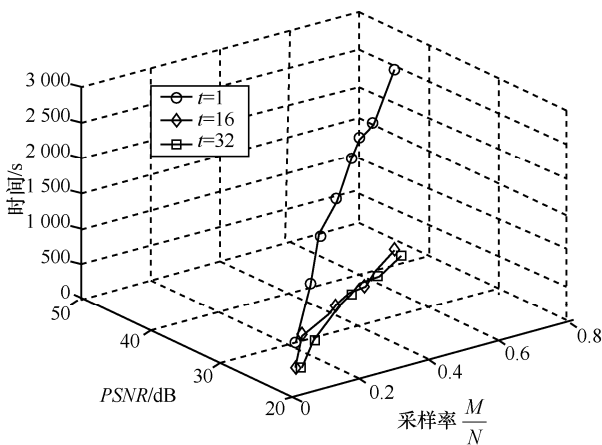


图 4 不同维数观测矩阵重构 2 维图像性能比较 (Lena, $\frac{M}{N}=0.5$)

第二组与其他低存储压缩感知方法的对比实

验中，主要与文献[6]所示的分块压缩感知方法和文献[10]中的 Kronecker 压缩感知方法进行了比较。BCS 压缩采样时人为地将原始图像分成大小相等的若干块（如 16×16 ），随后根据设定的采样率，构建观测矩阵对原始图像进行分块采样和重构；Kronecker 压缩感知方法首先根据设定的采样率构建一个或若干个低阶观测矩阵，随后利用 Kronecker 运算构建一个大小与传统压缩感知方法一样的观测矩阵 ($M \times N$) 进行压缩采样并进行全局重构；本文所述的 STP-CS 方法根据设定的采样率首先构建一个较小的观测矩阵 ($t > 1$) 对原始信号进行全局采样，随后进行分组重构。对于 3 种不同的低存储压缩感知方法，从本质上来讲就是采用的观测矩阵大小与压缩采样方式的区别。

实验中，对 BCS 方法设定图像块的大小为 16×16 ，Kronecker 方法中采用 2 个矩阵（一个大小为 2×2 ，另一个大小为 $\frac{M}{2} \times \frac{N}{2}$ 进行张量积运算得到对应的观测矩阵，本文方法中设定 $t=2, 4, 8, 16$ 和 32，采用的观测矩阵均为高斯随机观测矩阵，重构算法采用 l_q -范数 ($q=0.8$) 的 IRLS 方法。对比实验中设定的采样率为 $\frac{M}{N}=0.125 0, 0.250 0, 0.375 0, 0.437 5, 0.500 0, 0.562 5, 0.625 0$ 及 $0.750 0$ 。对 Lena 图像的小波系数分别进行 50 次采样和重构，取 PSNR 的平均值和重构时间的平均值，分别如表 5 和表 6 所示。

根据表 5 中 PSNR 值所示，对于相同的采样率，利用本文所述方法，即便采用 $t=32$ 时的高斯随机观测矩阵，其所得重构图像的 PSNR 值均明显高于文献[10]的 Kronecker 方法所得结果，且相比文献[6]的 BCS 方法，本文方法均能接近或超过 BCS 方法所得结果。此外，对于表 6 中所示的重构时间，本文方法明显快于 Kronecker 方法；且随着采样率的提高，本文所述方法的重构速度要明显优于 BCS 方法。

需要指出的是，在对比实验中，对于 BCS 方法，其块大小的选择对重构质量有非常大的影响，且对于 Kronecker 方法，其进行 Kronecker 运算的 2 个观测矩阵大小对重构质量也同样有着非常大的影响。而利用本文所述方法，其选用的观测矩阵大小基本对重构质量没有影响。

综上所述，本文所述的 STP-CS 压缩感知模型

表 5 与其他低存储压缩感知方法比较的峰值信噪比 (Lena 512 像素×512 像素)

压缩感知方法	峰值信噪比/dB							
	0.125 0	0.250 0	0.375 0	0.437 5	0.500 0	0.562 5	0.625 0	0.750 0
本文 $t=2$	25.458 2	30.192 0	34.216 3	35.767 9	36.506 8	37.436 6	39.727 8	42.287 9
本文 $t=4$	25.412 3	29.578 1	34.124 7	35.086 4	36.342 2	37.493 0	39.270 5	42.433 7
本文 $t=8$	25.751 4	29.734 7	33.225 8	35.286 4	36.226 6	37.530 1	38.591 0	41.950 1
本文 $t=16$	25.369 5	30.683 7	33.117 5	35.002 9	36.594 2	37.237 4	38.991 9	42.083 8
本文 $t=32$	24.926 4	29.219 5	33.015 7	34.907 1	36.035 9	37.795 8	38.317 1	41.254 6
文献[6]BCS	24.331 4	29.633 3	32.984 7	34.657 5	36.334 9	37.436 7	38.628 1	41.490 3
文献[10]KroneckerCS	25.060 9	28.349 7	29.528 1	31.121 5	33.785 3	34.981 0	35.296 1	37.237 2

表 6 与其他低存储压缩感知方法比较的重构时间 (Lena 512 像素×512 像素)

压缩感知方法	重构时间/s							
	0.125 0	0.250 0	0.375 0	0.437 5	0.500 0	0.562 5	0.625 0	0.750 0
本文 $t=2$	73.29	145.95	241.79	283.20	299.61	327.55	357.10	421.12
本文 $t=4$	27.33	45.22	70.33	86.18	86.93	99.41	97.01	102.31
本文 $t=8$	15.52	24.40	31.65	37.24	41.09	41.313	44.20	44.87
本文 $t=16$	17.72	19.00	25.18	27.15	22.78	25.748	25.67	26.58
本文 $t=32$	24.77	26.56	28.34	28.95	26.50	26.633	26.48	26.15
文献[6]BCS	24.149 3	26.918 8	35.43	55.60	71.31	94.93	122.27	196.38
文献[10]KroneckerCS	230.79	542.66	989.49	1 212.8	1 649.6	1879.1	2 132.2	2 448.3

可以利用低阶观测矩阵实现对原始信号的压缩采样,且在保证重构质量的前提下,极大地提升重构的实时性,也成倍地降低了随机观测矩阵所需的存储空间。

4 结束语

针对压缩感知在大尺寸图像应用中存在的随机观测矩阵占用较大的存储空间、重构实时性差等问题,提出了一种利用低阶观测矩阵对原始信号进行全局压缩采样和分组重构的方法。利用该方法,既可以大大降低观测矩阵所需的存储空间,又使其重构的实时性得到有效的提升。

本文结合半张量积理论对低阶观测矩阵进行压缩采样的可行性、可重构性及分组重构方法等进行了理论分析,并通过 2 维图像信号对本文所述方法进行了验证和比较。实验结果表明,利用本文所述方法,在保证重构质量的前提下,可以成倍地降低观测矩阵所需的存储空间(根据实验结果,当降

低为传统方法的 $\frac{1}{4096}$ 时,仍可得到与传统方法一致的重构质量);另一方面,该方法大大提升了重构的实时性,特别针对大尺寸图像应用时,选择 $t=8、16、32$,其重构速度最快能提升近百倍,当选用 $t=64$ 时,针对 2 048 像素×2 048 像素大小的图像,重构速度可提升近千倍。

但基于半张量积理论的压缩感知方法还有一些问题亟需进一步的深入研究:1)需要在理论上进一步分析低阶观测矩阵与传统观测矩阵对原始信号进行压缩采样后,与原始信号之间的差别;2)需要进一步提升采用低阶观测矩阵后的重构质量,目前的方法从本质上来说并没有提升信号的重构质量,为此,亟需能找到一种适合低阶观测矩阵压缩采样的重构方法,使其既能提升重构质量,又能降低观测矩阵的存储空间并进一步提升重构的实时性。

利用本文所述方法,结合实际应用环境与条件,选择合适大小的观测矩阵,对于压缩感知的硬

件实现有非常积极意义。

附录 1 半张量积理论

半张量积乘法 (STP, semi-tensor product) 是一种新型矩阵乘法。它是介于传统矩阵乘法与张量积乘法之间的一种新运算, 即当 2 个矩阵 A 和 B 满足 A 的列数和 B 的行数呈倍数关系时, 两者之间即可进行左半张量积乘法^[20]。

定义 1 设 T 是一个 np 维行向量, X 是一个 p 维列向量。将 T 分割成 p 个等长的块 T^1, T^2, \dots, T^p , 它们都是 n 维行向量, 则定义左半张量积为

$$T \ltimes X = \sum_{i=1}^p T^i x_i \in \mathbb{R}^n \quad (26)$$

其中, $x_i \in X (i=1,2,\dots,p)$ 。

展开式(26), 有

$$T \ltimes X = T^1 x_1 + T^2 x_2 + \dots + T^i x_i + \dots + T^p x_p$$

其中, T^i 是一个长度为 n 的行向量, x_i 仅为列向量 X 中的一个元素, 则 $T^i x_i$ 所得仍是一个长度为 n 的行向量, $T \ltimes X$ 所得同样为一个 n 维行向量, 由此, 实现了 2 个长度不等向量的乘。

定义 2 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 。如果 n 是 p 的因子或 p 是 n 的因子, 则有

$$C = A \ltimes B \quad (27)$$

称 C 是 A 和 B 的左半张量积。其中, $C = (C^{ij}) = \text{Row}_i(A) \ltimes \text{Col}_j(B)$, $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,q$ 。

对于定义 2, 设 n 是 p 的因子 ($p=nt$), $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$, 则展开式(27), 有

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} B^{11} & \dots & B^{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B^{n1} & \dots & B^{nq} \end{bmatrix}$$

其中, $B^{ij} (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,q)$ 表示将矩阵 B 中的第 i 列分割成 n 块后的结果, 且 B^{ij} 是一个长度为 t 的列向量。从而利用定义 1, 式(27)便有如下形式

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} B^{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i} B^{iq} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} B^{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{mi} B^{iq} \end{bmatrix}$$

由此便实现了矩阵 A 和 B 的左半张量积运算。

性质 1 对于定义 2 所示的 A 和 B , 若 $n=p$, 则有 $A \ltimes B = AB$, 即半张量积退化为传统矩阵积。

性质 2 2 个矩阵的左半张量积的维数可以很容易地根据消去前一个矩阵的列数和后一个矩阵的行数的公因子来计算得到, 如

$$F_{p \times qr} \ltimes G_{r \times s} \ltimes H_{qst \times l} =$$

$$(F \ltimes G)_{p \times qs} \ltimes H_{qst \times l} =$$

$$(F \ltimes G \ltimes H)_{pt \times l} \quad (28)$$

性质 3 只要 \ltimes 有定义, 即矩阵有合适的维数, 则 \ltimes 满足结合律, 即

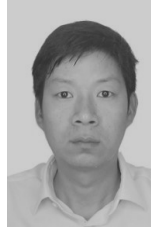
$$(F \ltimes G) \ltimes H = F \ltimes (G \ltimes H) \quad (29)$$

参考文献:

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [3] CANDÈS E J, ROMBERG J K, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [4] DAUBECHIES I, DEVORE R, FORNASIER M, et al. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2010, 63(1): 1-38.
- [5] 程晓良, 郑璇, 韩渭敏. 求解欠定义线性方程组稀疏解的算法[J]. 高校应用数学学报, 2013, 28(2): 235-248.
- [6] CHENG X L, ZHENG X, HAN W M. Algorithms on the sparse solution of under-determined linear systems[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2013, 28(2): 235-248.
- [7] ABOLGHASEMI V, FERDOWSI S, SANEI S. A block-wise random sampling approach: compressed sensing problem[J]. Journal of AI and Data Mining, 2015, 3(1): 93-100.
- [8] WANG J, ZHANG J, WANG W, et al. A perturbation analysis of nonconvex block-sparse compressed sensing[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2015, 29(1-3): 416-426.
- [9] 付宁, 乔立岩, 曹离然. 面向压缩感知的块稀疏度自适应迭代算法[J]. 电子学报, 2011, 39(3A): 75-79.
- [10] FU N, QIAO L Y, CAO L R. Block sparsity adaptive iteration algorithm for compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(3A): 75-79.
- [11] DUARTE M F, BARANIUK R G. Kronecker compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(2): 494-504.
- [12] ZHANG B J, TONG X, WANG W, et al. The research of Kronecker product-based measurement matrix of compressive sensing[J]. EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, 2013, 2013(1): 1-5.
- [13] 胡晓伟, 童宁宁, 何兴宇, 等. 基于 Kronecker 压缩感知的宽带 MIMO 雷达高分辨三维成像[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1475-1481.

- HU X W, TONG N N, HE X Y, et al. High-resolution 3D image via wideband MIMO radar based on kronecker compressive sensing[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2016, 38(6): 1475-1481.
- [12] DO T T, GAN L, NGUYEN N H, et al. Fast and efficient compressive sensing using structurally random matrices[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(1): 139-154.
- [13] HAIMI-COHEN R, MARK L Y. Compressive measurements generated by structurally random matrices[J]. Signal Processing, 2016, 120(C): 71-87.
- [14] OTAZO R, CANDÈS E, SODICKSON D K. Low-rank plus sparse matrix decomposition for accelerated dynamic MRI with separation of background and dynamic components[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2015, 73(3): 1125-1136.
- [15] CAI T T, ZHANG A R. Sparse representation of a polytope and recovery of sparse signals and low-rank matrices[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(1): 122-132.
- [16] 朱志臻, 周崇彬, 刘发林, 等. 用于压缩感知的二值化测量矩阵[J]. 微波学报, 2014, 30(2): 79-83, 96.
ZHU Z Z, ZHOU C B, LIU F L, et al. Binarized measurement matrix for compressive sensing[J]. Journal of Microwaves, 2014, 30(2): 79-83.
- [17] 王侠, 王开, 王青云, 等. 压缩感知中的确定性随机观测矩阵构造[J]. 信号处理, 2014, 30(4): 436-442.
WANG X, WANG K, WANG Q Y, et al. Deterministic random measurement matrices construction for compressed sensing[J]. Journal of Signal Processing, 2014, 30(4): 463-442.
- [18] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [19] 董博, 姚治海, 李喆, 等. 压缩感知 OMP 算法与 IRLS 算法在计算鬼成像中的对比分析[J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2016, 2016(1): 21-27.
DONG B, YAO Z H, LI Z, et al. Contrast analysis of compressive sensing OMP and IRLS algorithm in the computational ghost imaging[J]. Journal of Changchun University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2016, 2016(1): 21-27.
- [20] CHEN D Z, QI H S, LI Z Q. Analysis and control of boolean networks: a semi-tensor product approach[M]. Springer, 2011.

[作者简介]



王金铭(1978-), 男, 浙江富阳人, 浙江树人大学副教授, 主要研究方向为非线性信息处理、图像处理、压缩感知等。



叶时平(1967-), 男, 浙江丽水人, 浙江树人大学教授, 主要研究方向为图像处理、智能系统、地理信息系统等。

尉理哲(1983-), 女, 内蒙古呼伦贝尔人, 浙江树人大学讲师, 主要研究方向为车联网、WSN、深度学习等。

许森(1982-), 男, 湖北荆门人, 浙江树人大学讲师, 主要研究方向为人工智能、智能控制、物联网等。

蒋燕君(1973-), 男, 浙江诸暨人, 博士, 浙江树人大学教授, 主要研究方向为智能电网、图像处理等。